Tentamen Complexe Analyse
06/11/07, 14.00–17.00 uur

1. Bepaal de oplossingen van de zesde-orde vergelijking
$$z^6 + z^4 + z^2 + 1 = 0.$$

2. Definieer de functie $f(z)$ door $f(z) = z^4 e^{-z^2}$. Maak duidelijk waarom de functie $|f(z)|$ op de verzameling
$$\{\, z \in \mathbb{C} : \, |z| \leq 1 \,\}.$$
een maximum bezit. Bereken dit maximum en beargumenteer het antwoord.

3. Bereken de integraal
$$\int_0^{2\pi} \sin^4 \theta \, d\theta$$
via residuenrekening.
Aanwijzing: bedenk hoe een residu uit een Laurent-ontwikkeling wordt afgelezen.

4. Beschouw de Fourier-integraal
$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+t^4} \, e^{-i\omega t} \, dt, \quad \omega \in \mathbb{R}.$$
   (a) Laat zien dat de functie $G(\omega)$ reëel en even is.
   (b) Bereken $G(\omega)$ voor $\omega \leq 0$ via residuenrekening.
   Aanwijzing: als $z^4 + 1 = 0$ dan $1/z^3 = -z$.
   (c) Bepaal $G(\omega)$, $\omega \in \mathbb{R}$.

5. Definieer de 2π-periodieke reële functie $F(t)$ door
$$F(t) = 1, \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]; \quad F(t) = 0, \quad t \in [-\pi, \pi] \setminus \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$
   (a) Bepaal de bijbehorende Fourier-coefficiënten c_n, $n \in \mathbb{Z}$.
   (b) Hoe ziet de bijbehorende (reële) Fourier-ontwikkeling er uit?
   (c) Wat levert de puntgewijze Fourier-ontwikkeling op in $t = 0$? Geef aan welke stelling wordt gebruikt.
   (d) Wat levert de gelijkheid van Parseval op?